Revista Caribeña de Investigación Educativa, 2018, 2(2), 107-119

https://doi.org/10.32541/recie.2018.v2i2.pp107-119

CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS ENFOCADA AL DESARROLLO DE LA CREATIVIDAD

Mathematical problems classification towards creativity development

- María **García Cruz***
  Instituto de Formación Docente Salome Ureña,
  República Dominicana
  mcelmdf@gmail.com
  https://orcid.org/0000-0002-1602-8812
- Carlos **Falcón Rodríguez**
  Instituto de Formación Docente Salome Ureña,
  República Dominicana
  falc4847@yahoo.com
  http://orcid.org/0000-0003-1544-8484

Resumen

Este trabajo ofrece una metodología novedosa para la clasificación de los problemas matemáticos que se usan en la enseñanza preuniversitaria. La clasificación se hace atendiendo a lo que hemos definido como espectro de relaciones funcionales de un problema. Con este método logramos precisar la importancia del problema en el desarrollo de la inteligencia lógico-matemática de los estudiantes. En el trabajo se abordan diferentes aspectos del proceso de enseñanza bajo la luz de un nuevo enfoque. Algunos ejemplos son: i) se discute sobre el desarrollo de dos clases de creatividad lógico-matemática, ii) la racionalización del aprendizaje basado en problemas, iii) la identificación de competencias matemáticas y iv) la desmitificación de la creatividad matemática, que es quizás, el aspecto más importante de nuestro trabajo.

Palabras clave*:* creatividad, creatividad en matemáticas, problema matemático, relaciones funcionales, aprendizaje basado en problemas, competencias matemáticas.

Abstract

This paper offers a novel methodology for the classification of mathematical problems that are used in pre-university education. The classification is made according to what we have defined as the spectrum of functional relationships of a problem. With this method we can specify the importance of the problem in the development of the logical-mathematical intelligence of the students. In the works of the different aspects of the teaching process are addressed in the light of a new approach. Some examples are: i) the development of creativity is discussed with two different kinds of logical-mathematical ingenuity, ii) the rationalization of problem-based learning, iii) the identification of mathematical competences and iv) the demystification of mathematical creativity, which is perhaps the most important aspect of our work.

Keywords: creativity, mathematical creativity, functional relations, mathematical competencies, problem-based learning.

ISSN (impreso): 2636-2139
ISSN (en línea): 2636-2147
Sitio web: https://revistas.isfodosu.edu.do/recie

* Autor de correspondencia

Recibido: 20 octubre 2018
Aprobado: 14 diciembre 2018

COMO CITAR:

García-Cruz, M., & Falcón-Rodríguez, C. (2018). Clasificación de problemas de matemáticas enfocada al desarrollo de la creatividad. *Revista Caribeña de Investigación Educativa (RECIE), 2*(2), 107-119. https://doi.org/10.32541/recie.2018.v2i2.pp107-119

1. Introducción

La manera en que diferentes personas encaran la resolución de un problema de matemática es muy variada, y es común oír hablar de la belleza de algunas soluciones. Un procedimiento nos resulta "bello" si es "creativo", si se aleja de lo tradicional y es más eficiente en cuanto al volumen de trabajo explícito. Sin embargo, todos los que hemos trabajado para desarrollar la creatividad matemática en estudiantes, terminamos, en la mayoría de los casos, dándoles buenas recetas para situaciones específicas o con cierto grado de generalidad, esperando que luego el cerebro del estudiante haga la tarea de adaptación a cada problema.

La selección de los problemas es un aspecto que llama la atención. En general, se podría decir que un problema adecuado es aquel que ha sido seleccionado por alguien que conoce su trabajo como profesor de Matemáticas, que a su vez, se gana esta distinción, entre otras cosas, porque es capaz de resolver y crear problemas con un alto grado de dificultad. Cuando hicimos una búsqueda sobre los métodos de clasificación de problemas de Matemáticas, nos percatamos que los métodos existentes están destinadas a proporcionar un agrupamiento que facilite el trabajo del profesor, ajustado a determinados programas. En esencia, se garantiza que el estudiante enfrente una variedad de problemas. Nuestro punto de vista es que, a los efectos del desarrollo de la creatividad matemática, esta variabilidad es sólo en forma, en lo externo, y no en lo esencial. En la revisión de la literatura veremos algunos ejemplos.

2. Revisión de la literatura

Según Blanco (1993, p. 49), los problemas se clasifican en: 1) Ejercicios de reconocimiento; 2) Ejercicios algorítmicos o de repetición; 3) Problemas de traducción simple o compleja; 4) Problemas de procesos; 5) Problemas sobre situaciones reales; 6) Problemas de investigación matemática; 7) Problemas de puzles; 8) Historias matemáticas. En su trabajo, el autor hace un llamado al uso de una mayor variedad de problemas en cuanto al tipo de contexto del cual surgen, y en cuanto a los niveles de dificultad de los mismos.

Por otro lado, Muñoz Caro (2011) clasifica los problemas en: a) Problemas aritméticos (de tres niveles); b) Problemas geométricos; c) Problemas de razonamiento lógico; c) Problemas de recuento sistemático; d) Problemas de razonamiento inductivo; e) Problemas de azar y probabilidad.

Para Conejo y Ortega (2013), los problemas se clasifican en: 1) Ejercicio; 2) Ejercicio contextualizado; 3) Problema contextualizado; 4) Ejercicio con texto; 5) Problema con texto; 6) Puzle; 7) Prueba de una conjetura; 8) Problema de la vida real; 9) Situación Problemática; 10) Situación.

Como ya se ha señalado, aunque todos estos tipos de clasificación pueden ser muy útiles para el profesor a la hora de enfrentar su trabajo, no se enfocan en lo esencial del razonamiento lógico-matemático. En este estudio pretendemos ofrecer una vía de clasificación enfocada en la forma de razonamiento necesaria en la solución del problema, más que en los adornos contextuales y redacciones alrededor del mismo. Con este enfoque, lo importante no es si el problema tiene texto o no lo tiene, si es un problema de la vida real o es claramente una situación ficticia, si es una situación problemática o es un ejercicio directo, si es de probabilidades o es de aritmética; desde nuestra perspectiva cada problema viene clasificado por los tipos de relaciones funcionales necesarias en su solución o soluciones.

Todos los autores anteriores al hacer sus clasificaciones se han basado en diferentes criterios; todos han hecho un mismo tipo de razonamiento lógico-matemático, el más básico de todos, que es la clasificación. Es el mismo trabajo que hace un niño al separar figuras por colores, o por formas geométricas. Si el niño hace bien su tarea clasificando, y luego desarrolla el lenguaje y determinadas habilidades, podrá hacer clasificaciones cada vez más complejas que involucren otras formas de razonamiento.

Las clasificaciones, junto con las tareas que realizaron los autores mencionados y con las que aquí haremos, tienen algo esencialmente común, el uso de las relaciones de equivalencia. Este uso puede ser consciente o inconsciente, pero es algo que forma parte del espectro de relaciones funcionales necesarias en la solución del problema de clasificación.

Estas relaciones funcionales son las que deseamos plasmar como conexiones en la mente del estudiante. El proceso por el cual el estudiante aprende estas relaciones funcionales lo concebimos de dos formas, la primera por repetición de lo aprendido; la segunda, de un grado muy superior en calidad, es cuando el estudiante inventa o descubre las relaciones funcionales (RF)[1] necesarias, que él no conocía anteriormente. Son estas RF las que concebimos como espectro del problema para su clasificación. En este trabajo mostramos ejemplos que aclaran el concepto de relación funcional asociada a un problema. A veces, es una función como se define en Matemáticas, otras, una familia de funciones; y en ocasiones, relaciones desde el punto de vista matemático que no son funciones.

Quisiéramos por último mencionar que cuando se clasifican las tareas en Educación Física, algunos autores como, Vinuesa y Vinuesa (2016), usan los siguientes términos:

- Resistencia
- Fuerza
- Velocidad
- Flexibilidad
- Coordinación y equilibrio

Esta forma de clasificación está más acorde con lo que pretendemos hacer en este trabajo.

3. Metodología

Debemos definir algunos conceptos no matemáticos, empezando por ¿qué entendemos por problema matemático? Aquí la literatura hace diferencia entre ejercicio y problema, agregando algunos adjetivos. Desde nuestro punto de vista un problema matemático está bien formulado desde el momento que origina una sucesión de RF, con el propósito de transformar el estado de conocimiento que un sujeto tiene sobre el mismo. Desde este punto de vista, el mismo proceso de formulación de un problema puede requerir RF en su formulación. También debemos destacar que lo que habitualmente llamamos ejercicio, con texto o sin él, tiene todo el mérito para llamarse problema matemático. Lo realmente importante es el conocimiento que tiene el que enfrenta el problema de las RF necesarias para la solución del mismo. Es aquí donde aparece la creatividad, definiendo la creatividad matemática como el momento en que el estudiante descubre o inventa alguna RF destinada a la solución del problema.

[1] RF significará relaciones funcionales o relación funcional, según convenga a la concordancia.

Pongamos por ejemplo un niño al que se le están enseñando los colores y nosotros le damos un grupo de objetos a clasificar. Le hemos enseñado la relación funcional:

$$f : A \rightarrow \{rojo, azul, amarillo\}$$

En dicho RF es el conjunto de objetos. Supongamos que él toma los objetos y los pone en dos grupos, los más grandes y los más pequeños. Si nosotros no habíamos trabajado este aspecto con él, debemos concluir que creó un problema, y además, creó una nueva RF:

$$g : A \rightarrow \{grande, pequeño\}$$

El punto de vista que utilizamos en este trabajo tiene mucho de inspiración en la obra didáctica de George Pólya (1887-1985). Por lo que vale mencionar algunos mandamientos de su "decálogo del profesor" (1962):

- Sea instruido en las vías del conocimiento: el mejor medio para aprender algo es descubrirlo por sí mismo.
- No les deis únicamente "saber", sino "saber hacer", actitudes intelectuales, el hábito de un trabajo metódico.
- Enseñadles a conjeturar.
- Enseñadles a demostrar.
- En el problema que estéis tratando, distinguid lo que puede servir, más tarde, a resolver otros problemas - intentad revelar el modelo general que subyace en el fondo de la situación concreta que afrontáis.
- No reveléis de pronto toda la solución; dejad que los estudiantes hagan suposiciones, dejadles descubrir por sí mismos siempre que sea posible.
- No inculquéis por la fuerza, sugerid. (p.116)

Cuando el autor nos habla "el modelo general que subyace en el fondo de la situación concreta que afrontáis", para nosotros son las RF que permiten resolver o transformar el problema matemático.

De lo antes expuesto se desprende la metodología que seguiremos. Con la solución de un problema aparece "lo que puede servir, más tarde, a resolver otros problemas"; o de otra forma, "el modelo general que subyace en el fondo", esto es lo que nosotros llamamos RF del espectro del problema. Dos problemas con el mismo espectro de RF estarán en el mismo grupo. Ejemplos aclaratorios:

- Problema 1
  En un camión caben 240 cajas de frutas. Si ya se acomodaron 126, ¿cuántas cajas faltan por acomodar para completar la carga del camión?

- Problema 2
  Una piscina se puede llenar en 5 horas, con 3 bombas de agua grandes y 2 pequeñas. Igual-

mente, se llena en 5 horas cuando usamos 2 grandes y 7 pequeñas. ¿Cuántas bombas de agua pequeñas son necesarias para realizar el trabajo de 1 bomba de agua grande?

El espectro de RF en ambos problemas es el mismo. En este caso la relación funcional es:

$$r : Z \times Z \rightarrow Z$$
$$(x,y) \rightarrow x - y$$

Aunque en el segundo problema, llegar a la conclusión de que una bomba de agua grande equivale a 5 pequeñas parece mucho más complicado que resolver el primer problema, en realidad la RF anterior (resta) aplicada dos veces es lo necesario.

La clasificación de estos problemas basada en su RF sería:

1.(r) En un camión caben 240 cajas de frutas. Si ya se acomodaron 126, ¿cuántas cajas faltan por acomodar para completar la carga del camión?

2.(r) Una piscina se puede llenar en 5 horas con 3 bombas de agua grandes y 2 pequeñas. Igualmente, se llena en 5 horas cuando usamos 2 grandes y 7 pequeñas. ¿Cuántas bombas de agua pequeñas son necesarias para realizar el trabajo de 1 bomba de agua grande?

Veamos otros ejemplos de clasificación donde las RF resultan de mayor complejidad.

- Problema 3
  ¿Cuántos productos, de dos números primos entre sí, son iguales a 30030?

- Problema 4
  La herencia de dos hermanos consta de 6 propiedades. El abogado quiere presentar todas las posibilidades de dividir las 6 propiedades en dos grupos, porque, aunque alguna división fuera desigual, el que toma menos podría ser compensado monetariamente por el otro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden dividir las propiedades?

- Problema 5
  Un número decimal sólo usa 6 dígitos sin repetición: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El punto decimal no se sabe si está al principio, al final o en medio del número. Otro dato que se conoce es que los dígitos de la parte entera están ordenados creciendo, al igual que los de la parte decimal. ¿Cuántos números hay con estas condiciones?

Básicamente el espectro de RF de los últimos tres problemas es el mismo. En el problema 3, el estudiante deberá aplicar una RF adicional. Esta es la que a cada número natural le asigna su descomposición en factores primos. En este caso,

$$30030=2\times3\times5\times7\times11\times13$$

Luego consideramos el conjunto A={2,3,5,7,11,13} y las RF,

$$\begin{array}{rcr} f: P(A) \to P(A) & & g: \{A\ /A\ es\ finito\} \to N \\ B \to B^C & \textbf{Y} & A \to \#P(A) \end{array}$$

Descritas como la biyección *f* del conjunto potencia de *A* en el conjunto potencia de *A*, que a cada subconjunto *B* de *A* le asigna su complemento B^C, y la aplicación *g* que a cada conjunto finito le asigna el cardinal de su conjunto potencia.

Escogido un subconjunto de *B* de *A*, este y B^C definen respectivamente los factores de cada miembro del par de números primos. Si *B* o B^C son el conjunto vacío, el número asociado a ellos es 1. Como (B,B^C) y (B^C,B) representan un mismo par de factores primos, tenemos que aplicar otra RF, que es dividir el cardinal de $\{(B,B^C)/B \subset A\}$, es decir, #P(A), entre 2. La solución es $\frac{2^6}{2} = 32$.

Los problemas 4 y 5 requieren el mismo procedimiento, esto es las mismas RF, salvo la descomposición en factores primos. La división entre 2 no es usada en el 5.

La clasificación aparecería en estos casos como:

$$\begin{array}{lll} f: N \to \left\{\begin{matrix} productos\ planteados\ de \\ números\ primos \end{matrix}\right\} & g: P(A) \to P(A) & h: \{A\ /\ A\ es\ finito\ \} \to N \\ \quad n \to \begin{pmatrix} descomposición\ de\ n \\ en\ factores\ primos \end{pmatrix} & \quad B \to B^C & \quad A \to \#P(A) \end{array}$$

3.(f-g-h) ¿Cuántos productos, de dos números primos entre sí, son iguales a 30030?

4.(g-h) La herencia de dos hermanos consta de 6 propiedades. El abogado quiere presentar todas las posibilidades de dividir en dos grupos las 6 propiedades, porque, aunque alguna división fuera desigual, el que toma menos podría ser compensado monetariamente por el otro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden dividir las propiedades?

5.(g-h) Un número decimal sólo usa 6 dígitos sin repetición: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El punto decimal no se sabe si está al principio, al final o en medio del número. Otro dato que se conoce es que los dígitos de la parte entera están ordenados creciendo, al igual que los de la parte decimal. ¿Cuántos números hay con estas condiciones?

De esta forma, el nombre del grupo está dado por una o más RF, que sirven de pista para la solución de los ejercicios del grupo. Estas RF deben ser lo más generales posible, para abarcar el conjunto de todos los problemas que admiten ese procedimiento por solución. En este contexto no tiene valor hablar de algunas RF, como es la división por 2. En problemas de escuela primaria, esta RF podría estar en las que se usan para clasificar. Un problema podría estar en dos grupos como consecuencia de admitir soluciones basadas en diferentes conjuntos de RF. Cuando resolvemos un problema con dos diferentes conjuntos de RF, la utilidad formativa del mismo varía.

En lo que sigue abordaremos las sugerencias y recomendaciones que el análisis de este enfoque nuevo de clasificación sugiere.

4. Resultados

En este punto ya debemos hablar de la creación de un banco de problemas, clasificados de acuerdo a las RF fundamentales que son necesarias en su solución. Dos vías son posibles:

1. Escoger los problemas e identificar sus RF.
2. Escoger RF y construir el problema *ad hoc*.

Las dos vías son válidas, y a nuestro juicio, necesarias. El trabajo que requiere esta clasificación es grande si se pretende, como es el caso, usar la misma en el desarrollo de la creatividad.

Los razonamientos lógico-matemáticos son descritos de diferentes formas por diversos autores. En Soler-Álvarez y Manrique (2014), podemos leer que, “Para Peirce, el razonamiento es de tres tipos: abductivo, inductivo y deductivo. Lo que hay que destacar es que, en esta etapa, las tres formas de razonar coexisten como tres estadios interdependientes y entrelazados del método científico” (p.194). Este mismo trabajo también nos plantea que “el razonamiento matemático empieza cuando en la imaginación se forma alguna clase de representación de hechos o fenómenos observados. Esta representación se hace a partir de diagramas, los cuales adicionalmente permiten identificar las relaciones encontradas en los hechos observados” (p. 195).

En cualquiera de sus manifestaciones, los razonamientos lógico-matemáticos constituyen un proceso de solución a algún problema matemático. El sujeto ha usado una serie de RF para transformar el estado de conocimiento matemático que él tiene. Como hemos dicho anteriormente, este proceso se da de dos formas diferentes. La primera es cuando de un conjunto de RF que el sujeto ya conoce, usa algunas, y en la combinación de ellas, el problema matemático es resuelto; es decir, adquirimos un conocimiento superior. Esto es lo que llamaremos creatividad de tipo 1. La segunda es cuando el sujeto crea, inventa o descubre nuevas RF. Muchas veces la RF creada es más importante que el problema resuelto y queda, con vida propia, dentro del cuerpo de las Matemáticas. Esta es la creatividad de tipo 2.

Entendemos que es adecuado estimular los dos tipos de creatividad, en especial el tipo 2. Esta es realmente escasa y como es fácil de imaginar, pensamos que una forma de estimularla es enfrentando a los estudiantes a problemas en cuya clasificación aparezcan RF que ellos desconozcan. Es decir, si queremos estimular la creación, invención o descubrimiento de una RF en el estudiante, le presentaremos diferentes problemas que contengan en su clasificación a esta RF. Debemos aclarar, sin embargo, que la definición de creatividad matemática, es algo asociado al sujeto. Lo creativo de tipo 2 para unos, puede ser creatividad de tipo 1 para otros. Es por esto que, en las clasificaciones de problemas como desarrolladores de la creatividad, los profesores no siempre coinciden.

En el trabajo de Ayllón, Gómez y Ballesta-Claver (2016), encontramos que Dickman (2014) realizó un estudio con el que pretende indagar sobre la conexión existente entre el planteamiento de problemas y la creatividad. Para ello pide a un grupo de profesores de primaria, a psicólogos que trabajan en educación matemática y a matemáticos, que evalúen problemas inventados en cuanto a la creatividad. Su estudio le lleva a evidenciar que no hay un consenso entre ellos, debido a que no comparten la misma definición de creatividad, aunque sí admiten la vinculación entre creatividad e invención de problemas (p. 183).

Como vemos, el problema que nos planteamos al inicio nos lleva necesariamente a la creación de un conjunto parcialmente ordenado de problemas, en el que un problema es mayor que otro si el conjunto de RF de su clasificación contiene a las del otro.

Analicemos lo que hasta ahora hemos planteado acerca de estímulo de la creatividad, poniendo a los estudiantes ante problemas que conlleven al uso de RF por ellos desconocidas (creatividad de tipo 2), o ante la necesidad de combinaciones de las ya conocidas (creatividad de tipo 1). Todos los que de alguna manera hemos estado involucrados con estudiantes y problemas de competencias de Matemáticas, hemos medido el grado de los problemas por la dificultad que nos ha puesto el mismo en su solución. Si no hemos podido resolver un problema, y decidimos presentárselo a los estudiantes, es porque estamos seguros de que es este tipo de problema el que logra desarrollar más su creatividad. Estos problemas abiertos, al menos para nosotros, no podemos clasificarlos, pues no sabemos las RF que intervienen en su solución.

Lo expuesto no es lamentable, son estos problemas los que deben estar en el punto más alto del conjunto parcialmente ordenado de problemas. Estos, hasta el día que sean resueltos, son sólo eso, "problemas abiertos". No tienen que ser problemas muy duros de resolver, es sólo que nosotros no hemos podido resolverlos y no han sido resueltos por algún estudiante. Creo que esta manera de ver las cosas se desprende del método de clasificación de problemas. Ningún profesor debería sentirse mal porque algún alumno resuelva problemas abiertos que él no pudo hacer, al igual que un entrenador de salto no se siente mal cuando el alumno salta más que él, que en este caso, es lo usual si trabaja con jóvenes. Después de esta digresión necesaria acerca de los problemas abiertos, continuamos con el desarrollo de la creatividad.

En el estudio de Mehta, Mishra, y Henriksen (2016), se pueden leer las palabras de Maryam Mirzakhani, acreedora de la Medalla Fields (2014),

> La parte más gratificante es el momento "Aha", la emoción de descubrir y disfrutar el comprender algo nuevo: la sensación de estar en la cima de una colina y tener una visión clara. Pero la mayoría de las veces, hacer Matemáticas para mí es como estar en una larga caminata sin sendero ni final a la vista. (p.16)

Y es que de esto se trata la creatividad, de resolver problemas nuevos o viejos, pero con nuevas RF para nosotros. Si creamos, descubrimos o inventamos nuevas RF, tenemos que pasar por el momento de desorientación, "la caminata, sin sendero ni final a la vista".

La introducción del espectro de RF de un problema, además de permitir una clasificación "matemática" de los problemas, conlleva, desde nuestro punto de vista, un cambio en la concepción de enseñanza de las Matemáticas. Señalemos estos cambios prospectivos:

1. La enseñanza de las Matemáticas se identifica con la aprehensión por parte del estudiante de RF. Una RF esta aprehendida cuando el estudiante es capaz de usarla en diferentes contextos.
2. Cada RF tiene un problema genérico que la define: ¿Cuál es el conjunto de todos los problemas donde podemos usar esta RF? Este problema siempre quedará abierto motivando el desarrollo del estudiante.
3. Las RF permiten visualizar las competencias que deseamos los estudiantes desarrollen. En cualquier contexto social, el estudiante podrá usar las RF que se avengan a la problemática presente.

4. Permiten dirigir la enseñanza por problemas, dándole a la palabra "problema" un significado más general.
5. Permiten incidir en el desarrollo de la creatividad, enfrentando al estudiante a una graduación de los problemas dada por el espectro de RF.
6. Desmitifica el concepto de creatividad en Matemáticas. Todos podemos entrenarnos para ser más creativos.
7. Serían la guía del currículo de Matemática.

Hagamos algunos señalamientos generales sobre lo señalado:

1. En la actualidad, en la enseñanza secundaria, un tema obligado es la ecuación de la recta en el plano y quizás en el espacio. Las competencias específicas acerca de este punto pueden ser más o menos generales, pero se tiende a confundir qué es lo esencial que debe quedar en las conexiones mentales del estudiante: la RF lineal. La ecuación de la recta, en sus diferentes modalidades, son problemas que se clasifican bajo la RF lineal. Esta última tiene propiedades comunes operando de $R^n \rightarrow R^m$, para diferentes valores de n y m. Otro ejemplo sería que, muchos problemas de Geometría Plana se resuelven usando el hecho de que el área de un triángulo es una función lineal del lado del triángulo, cuando este se extiende en la misma recta. Si el estudiante desconoce esta manera de enfrentar la diversidad de problemas, es lo mismo que un explorador que no puede subir a una colina para tener una visión de lejanía y conjunto.
2. Este punto es una especie de ingeniería inversa. Esta manera de presentar problemas debe ser más explotada, pues reafirma y resume lo aprendido, además de que ofrece interesantes conexiones entre diferentes contextos.
3. Las competencias específicas, referidas a problemas más que a RF, dejan ese desagradable e injusto comentario, acerca del desuso de las Matemáticas en la vida futura del estudiante. Es cierto que en la vida de ciertas personas no aparece la ecuación de una recta ni tampoco el teorema de Pitágoras, pero las RF lineales las tendrá que ver mucho cuando esté pagando una hipoteca o una tarjeta de crédito. La RF que asigna la longitud del tercer lado de un triángulo, cuando son conocidos los otros dos lados y el ángulo comprendido, la usará siempre que tenga que seleccionar una ruta, al menos de forma aproximada.

Otro ejemplo útil es el que aparece en el currículo educativo de República Dominicana (MINERD, 2017), cuando refiere una competencia específica del área de Matemática: "Realizar conversiones entre unidades de volumen líquido para resolver problemas de la vida cotidiana" (p 51).

Es muy probable que muchas personas no utilicen nunca las conversiones entre diferentes unidades de capacidad. Sin embargo, la RF lineal, en todas sus variantes, es algo que aparece en diferentes grados en la vida de todos.

No está de más señalar el siguiente párrafo que se encuentra en el documento de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2017).

> La competencia matemática es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en distintos contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para descri-

bir, explicar y predecir fenómenos. Esto ayuda a las personas a reconocer la presencia de las Matemáticas en el Mundo y a emitir juicios y decisiones bien fundamentados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (p. 64)

4. En el mismo documento del Ministerio de Educación (MINERD, 2017) señalado anteriormente se propone, dentro de sus "Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje", el "Aprendizaje basado en problemas (ABP)" (p. 45). En nuestra opinión, si se centran las competencias específicas en las RF, y éstas a su vez están definidas por abstracción, como el conjunto de los problemas donde podemos usarlas, no hay otra opción que la enseñanza sea basada en problemas, entendiendo el concepto de problema como se ha expresado anteriormente.
5. Este es el punto básico de este trabajo, aunque hemos incursionado en problemas próximos, por razones obvias de conexión. Ya hemos hablado de la necesidad de enfrentar a los estudiantes, no sólo a problemas nuevos por su contexto, sino a problemas que se resuelvan con nuevas RF.
6. Cuando al estudiante se le pone en una situación que pueda decir ¡Eureka!, lo recordará toda la vida. Las consecuencias de ese cambio de actitud son gratificantes para él y espléndidas para la sociedad. En este sentido, Ramos (2006) dice que ''La evolución de un país depende del desarrollo científico del mismo, y para ello se necesitan personas creativas", y agrega que "educar para ser creativos es un requisito esencial en los inicios del siglo XXI" (p. 9).
7. Desde nuestro punto de vista esto no es un desatino. Algunas disciplinas en educación superior se estructuran alrededor de ciertas RF: RF lineales, RF de derivación, RF de integración, RF de convergencia, etc. El Álgebra Lineal no tiene como centro el estudio de las matrices y sus operaciones, las matrices aparecen allí, porque es una forma de expresar RF lineales de $R^n \rightarrow R^m$.

La construcción de un banco de problemas clasificados, que permitan en la dinámica de trabajo con los estudiantes ir tomando acciones sobre los modos óptimos de clasificación, y que pudieran diferir de las recomendaciones aquí hechas, es un paso fundamental. En la actualidad existe un proyecto de investigación educativa en el ISFODOSU, República Dominicana, titulado: "Análisis de tareas y problemas de Matemáticas en relación con el desarrollo de la creatividad", que aborda esta temática. Aquí presentamos los objetivos de este proyecto:

1. Encontrar un método apropiada para definir las relaciones funcionales (RF) que caracterizan la solución de un problema y/o tarea de Matemática. Nos interesará el tipo de RF sin prestar mucha atención a los conjuntos sobre los cuales esta actúa.
2. Clasificar grupos de problemas y/o tareas de acuerdo con sus RF asociadas. Claro que un mismo problema o tarea de Matemática puede incluir diferentes RF. Encontrar una vía de clasificación. Por ejemplo, considerando alguna de ellas como la principal.
3. Construir grupos de problemas y/o tareas con determinadas RF.
4. Encontrar un método para clasificar estudiantes de acuerdo a las RF que son capaces de usar. Esto tendrá que ser a base de evaluaciones cortas que pueden ser orales.
5. Sugerir rutas óptimas para diferentes tipos de estudiantes y grupos de problemas y/o tareas.

Esperamos en un tiempo corto presentar los primeros resultados del trabajo de campo.

5. Conclusiones

¿Qué es la creatividad? ¿Es diferente la creatividad en Matemáticas de la creatividad en otras esferas?

Hemos seguido la línea de que la Matemática es algo tan específico, que incluso el concepto de creatividad se puede explicar dentro de su propio lenguaje. La solución y creación de problemas matemáticos, es la vía para desarrollar la creatividad matemática en los estudiantes. Los profesores de Matemáticas nos esforzamos por dar a los estudiantes todas las herramientas posibles para cubrir todas las situaciones de los posibles problemas. Desde nuestro punto de vista se les dan a los estudiantes relaciones funcionales (RF), redacciones contextuales y cómo relacionar ambas. El problema es que existe una gran diferencia entre “crear la relación funcional” y sólo aprender a usarla. Mehta, Mishra y Henriksen (2016) hacen notar que el éxito de varios ganadores de medallas Fields se asocia por una comunión entre las Matemáticas y el sentido de la belleza y la verdad. Esto se da espontáneamente en el momento de creatividad.

Por otro lado, el proceso de resolución de problemas es comprendido para dos grandes matemáticos en las siguientes fases: Para Pincaré (1908), preparación, incubación e iluminación; para Hadmard (1945), trabajo consciente de familiarización con el problema, trabajo semiconsciente o inconsciente de incubación de las ideas, inspiración o iluminación sobre la forma de resolver el problema, y verificación de que la inspiración conduce realmente a la solución.

Ambos genios matemáticos describen un momento de iluminación. Esto quiere decir que no saben cómo, pero una o varias RF nuevas han sido creadas, inventadas o descubiertas.

Lo que con nuestro trabajo pretendemos es poner en la zona de desarrollo próximo (Lev Vygotsky, 2007, p. 377), asociada a un grupo de estudiantes, momentos creativos, controlando la ayuda que se les da, con el propósito de lograr en ellos la creación de nuevas RF que resuelvan el problema matemático que están tratando. De esta forma les damos a los estudiantes “amplias oportunidades para participar en la lucha por resolver problemas y tareas matemáticas desafiantes que les permitan experimentar la creatividad en la Matemática” (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012, p. 288). Esta es la única forma de desarrollar la inteligencia lógico-matemática (Gardner, 2011, p. 6).

Crear nuevas RF sin que estas estén asociadas a la solución de un problema matemático es, en nuestra opinión, un buen problema matemático. Lo anterior es una paradoja, pero creemos que es una buena práctica intentar seguirla. No es sólo por inspiración o iluminación divina que surgen las nuevas RF. El cerebro tiene que estar entrenado, estimulado y obsesionado en la búsqueda de las mismas. Hace falta un gimnasio bien equipado y personas con deseos de hacer la diferencia. El gimnasio son nuestras aulas; los entrenadores; nuestro profesorado; los equipos, el banco de problemas clasificados y ordenados para estimular que sea la mayoría de nuestro alumnado la que se decida a hacer la diferencia.

Para terminar, recapitulamos los puntos principales de nuestro trabajo:

- Un problema matemático está bien planteado cuando estimula al estudiante a usar y/o crear RF que aumenten el conocimiento acerca del mismo. Desde esta perspectiva, un problema matemático puede ser lo que llamamos un ejercicio o una tarea, siempre que involucre el uso y /o creación de RF con el propósito antes mencionado.
- Cada problema tiene su espectro de RF. Este es el conjunto de RF nuevas o no, que son necesarias para resolverlo. Entendiendo por resolverlo el proceso en que se ha conseguido un conocimiento mayor del mismo.

- El contexto en el que se plantea el problema, la redacción del mismo u otros aspectos que no sean su espectro de RF, no son importantes en su clasificación.
- La creación de un banco de problemas clasificados es un primer objetivo y puede ser conseguido de dos formas diferentes: clasificando los problemas ya existentes, o construyendo los mismos con determinadas RF que necesitemos para trabajar con los estudiantes.
- Los problemas abiertos son aquellos bien planteados para los cuales no conocemos su espectro de RF.
- Un mismo problema puede tener dos o más espectros de RF. El problema con cada uno de sus espectros de RF, opera como problemas diferentes.
- Un orden parcial entre problemas puede ser definido a través de la noción de inclusión entre los subconjuntos de RF en sus espectros. Los problemas abiertos están en el punto más alto de este orden.
- Las RF deben definirse de la forma más general posible, sin perder contacto con el problema. En cada nivel de enseñanza podemos omitir en la clasificación de los problemas ciertas RF que, aunque necesarias en sus soluciones, resultan triviales.
- Las competencias matemáticas específicas deben ser definidas en términos de RF generales y no en términos de los problemas más populares (dentro de las Matemáticas). La diferencia entre estas dos cosas se observa por el nivel de generalidad y no por la redacción que hagamos.
- Cuando un estudiante resuelve un problema debemos distinguir dos situaciones diferentes:
  i. Ha usado una o varias RF que son conocidas.
  ii. Ha usado una RF desconocida por él, aunque esta sea en la forma de conectar las ya conocidas.

Al caso i lo hemos llamado creatividad de tipo 1. Al caso ii lo hemos llamado creatividad de tipo 2. Tratemos de estimular la creatividad de tipo 2, y por seguro tendremos buenos resultados con la de tipo 1.

Para estimular la creatividad de tipo 2 se presentan problemas que estén en la zona de desarrollo próximo del grupo de estudiantes. Una sola RF del espectro del problema que sea desconocida por el grupo, pero que, a la vez, sea alcanzable al menos para algunos de ellos.

A modo de conclusión: El estado ideal de una clase de Matemáticas es cuando cada estudiante ha identificado un problema bien planteado y se involucra en él.

Referencias

Ayllón, M., Gómez, I. & Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones*, *4*(1), 169-218.

Blanco, L. J. (1993). *Una clasificación de problemas matemáticos. Épsilon 25*, 49-60.

Conejo, L., & Ortega, T. (2013). *Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. Educación matemática, 25*(3), 129-158.

Gardner, H. (2011). *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós Ibérica

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. New York, USA: Princeton University Press.

Hartshorne, C., Weiss, P., & Burks, A. W. (1931). *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Harvard University Press.

Nadjafikhah, M., Yaftian, N., & Bakhshalizadeh, S. (2012) Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia- Social and behavioral Sciences, 31*, 285-291.

Mehta R., Mishra P. & Henriksen, D. (2016) Creativity in Mathematics and Beyond – Learning from Fields Medal Winners. *TechTrends*, *60*(1), 14-18.

Ministerio de Educación República Dominicana (MINERD, 2017). Diseño Curricular, Nivel Secundario, Modalidad Académica. Segundo Ciclo 4to, 5to y 6to. Versión Preliminar. Para Revisión y Retroalimentación. Santo Domingo, D. N.

Muñoz, C. (2011). Tipos de problemas matemáticos. *Pedagogía Magna*, *11*, 265-274.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, Matemáticas y Ciencias.* Versión Preliminar. París: OECD Publishing.

Pólya, G. (1962). *Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.* Combined edition. New York: Wiley.

Poincaré, H. (1908). *Science et méthode*. París: Flammarion.

Soler-Álvarez M. N. & Manrique V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias, 32*(2), 191-219.

Ramos Crespo, M. G. (2006). *Educadores creativos, alumnos creadores: Teoría y Práctica de la creatividad*. Seminario llevado a cabo en San Pablo, Bogotá, Colombia.

Vinuesa L. & Vinuesa J. (2016). *Conceptos y Métodos para el entrenamiento físico.* Madrid: Ministerio de Defensa.

Vigotsky, L. S. (2007). *Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas.* Buenos Aires: Colihue.